Poznámky a příklady. *1. Leviho větu snadno zobecníme pro* $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$

2. *V početní praxi je užitečná následující verze pro řady: nechť* $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$ *je posloupnost nezáporných funkcí a nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} \int \sum\limits_{k=1}^{n} f_n < \infty$. *Potom* $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}_d$ *a*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int f.$$

3. *Leviho věta platí rovněž pro* $\mathcal{M}_d$, *pokud připustíme funkce s nevlastními hodnotami.*

4. *pro* $\{f_n\} \subset \mathcal{M}_d$ *rovněž platí* $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_d$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_d$ *(opět, pokud připustíme funkce s nevlastními hodnotami).*

Věta 1 (Lebesgueova o majorantě)**.** *Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathcal{L}_n$, $f_n \to f$ *s.v. a existuje* $g \in \mathcal{L}_n$, *že* $|f_n| \leq g$ *s.v.*, $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $f \in L_n$ *a*
$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Základy teorie míry

Lebesgueův integrál snadno rozšíříme na některé měřitelné (ale ne nutně integrovatelné funkce). Pokud $f \in \mathcal{M}_d^+ \setminus \mathcal{L}_d^+$, potom definujeme $\int f = \infty$, pokud $f = f_1 - f_2$, pro $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_d^+$, potom definujeme $\int f = \int f_1 - \int f_2$, má-li pravá strana smysl. Prostor všech funkcí, pro které je Lebesgueův integrál definován po tomto rozšíření budeme značit $\mathcal{L}_d^*$ (zjevně platí $\mathcal{L}_d \subsetneq \mathcal{L}_d^*$).

Definice 2 (měřitelná množina a Lebesgueova míra)**.** *Množinu* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *nazveme* ***měřitelnou****, pokud* $\chi_A \in \mathcal{M}_d$. *Systém všech měřitelných podmnožin* $\mathbb{R}^d$ *budeme značit* Λ_d.

Lebesgueovu míru *množiny* $A \in \Lambda_d$ *pak definujeme jako* $\lambda_d(A) = \int \chi_A$.

Poznámky a příklady. *1. Každý interval v* $\mathbb{R}^d$ *je měřitelná množina, jednobodová množina je měřitelná, uzavřené i otevřené množiny jsou měřitelné.*

2. *Sjednocení a průnik a doplněk měřitelných množin je měřitelná množina.*

3. *Pro* $\{A_n\} \subset \Lambda_d$ *platí* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda_d$.

4. $\lambda_d(I) = \mathrm{Vol}_d(I)$ *(Lebesgueovu míru interpretujeme jako velikost - plochu, objem - množiny), otevřené a uzavřené množiny patří do* $\mathcal{L}_d$.

5. *Pro* $\{A_n\} \subset \Lambda_d$ *po dvou disjunktní platí* $\lambda_d(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_d(A_m)$.

Definice 3 (σ-algebra a míra)**.** *Je-li* Σ *systém podmnožin množiny* X, *nazveme jej* σ***-algebrou***, *pokud platí*

1. $\emptyset, X \in \Sigma$,
2. $A, B \in \Sigma$, *potom* $A \setminus B \in \Sigma$,
3. $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, *potom* $\bigcup A_n \in \Sigma$.

Dvojici (X, Σ) *nazýváme* ***měřitelným prostorem***. *Zobrazení* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *nazveme* ***mírou***, *pokud platí*

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. *jsou-li* $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, *po dvou disjunktní, potom* $\mu\left(\bigcup A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Trojici (X, Σ, μ) *nazýváme* ***prostor s mírou***.